Adı Soyadı:
Numarası:
İmza:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Toplam |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | |

20.06.2022

**ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ MATEMATİK BÖLÜMÜ**

**2021-2022 EĞİTİM ÖĞRETİM YILI MAT 212 ANALİZ IV FİNAL SINAVI SORULARI**

**1)** $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y-xy^3}{x^2+y^2}\cos\left(\pi\dfrac{x+y}{x-y}\right), & x\neq y \\ 0, & x=y \end{cases}$ fonksiyonu veriliyor.

a) $f_{xy}(0,0)$ ve $f_{yx}(0,0)$ kısmi türevlerini bulunuz.

b) $f$ fonksiyonunun $C^2$ sınıfından olup olmadığını belirleyiniz.

**2)** $z=f\left(x^2+y\right)$ ise $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ olduğunu gösteriniz.

**3)** $f(x,y,z)=x$ nın $g_1(x,y,z)=z-1=0$ düzlemi ile $g_2(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4=0$ küre yüzeyinin arakesiti olan çember üzerinde ekstremumlarını araştırınız.

**4)**

$$xy+x^2u=vy^2$$
$$3x-4yu=x^2v$$

olduğuna göre $u_x$, $v_x$ türevlerini hesaplayınız.

**5)**

$$u=f_1(x,y)=4x+2y$$
$$v=f_2(x,y)=-3x+y$$

olarak tanımlanan $f=(f_1,f_2)$ fonksiyonunun tersini bulunuz. $\dfrac{\partial x}{\partial u}$, $\dfrac{\partial x}{\partial v}$ türevlerini hesaplayınız.

**6)** Çok değişkenli fonksiyonlar için kısmi türevlenebilme, yönlü türev ve türev tanımlarını yapınız, aralarındaki ilişkiyi açıklayınız. İlgili teoremi ifade ve ispat ediniz.

**7)** $f(x,y)=\cos\left(y^3\right)$ fonksiyonunun $y=2\sqrt{x}$, $y=8$ ve $x=0$ eğrileri ile sınırlanan bölgedeki integralini hesaplayınız.

**8)** $f(x,y)=y.\arctan x$ fonksiyonuna $(0,1)$ noktası civarında ikinci dereceden türevleri içeren terimlere kadar Taylor formülünü uygulayınız.

**Not:** Sadece 6 soru cevaplayınız. Sorular eşit puanlıdır. Süre 100 dakikadır. Başarılar

**Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR**

ANALİZ IV FİNAL ÇÖZÜMLERİ

1.) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y - xy^3}{x^2+y^2} \cos\left(\pi . \dfrac{x+y}{x-y}\right) & , \quad x \neq y \\ 0 & , \quad x = y \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor.

a) $f_{xy}(0,0)$ ve $f_{yx}(0,0)$ kısmi türevlerini bulunuz.

b) $f$ fonksiyonunun $C^2$-sınıfından olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm: a)

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{k-0}{k} = 1$$

$$f_x(0,k) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,k) - f(0,k)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2k - hk^3}{h^2+k^2} \cos\left(\pi . \frac{h+k}{h-k}\right) - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{hk\,(h-k^2) \cos\left(\pi . \frac{h+k}{h-k}\right)}{(h^2+k^2)\, h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{k . (h-k^2) \cos\left(\pi . \frac{h+k}{h-k}\right)}{h^2+k^2} = k$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1-0}{h} = -\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \quad \boxed{\text{YOK}}$$

$$f_y(h,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(h,k) - f(h,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{h^2k - hk^3}{h^2+k^2} \cos\left(\pi . \frac{h+k}{h-k}\right) - 0}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{hk\,(h-k^2) \cos\left(\pi . \frac{h+k}{h-k}\right)}{(h^2+k^2) . k}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{h\,(h-k^2) \cos\left(\pi . \frac{h+k}{h-k}\right)}{h^2+k^2} = -1$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = 0$$

b) $f$, $C^2$-sınıfından değildir.

2.) $z = f(x^2+y)$ ise $z_{xx} - 2x\, z_{yx} - 2z_y = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $u = x^2+y$, $z = f(u)$

$z_x = f_u \cdot u_x = f_u \cdot 2x = 2x \cdot f_u$

$z_{xx} = 2 \cdot f_u + 2x \cdot f_{uu} \cdot u_x = 2f_u + 4x^2 f_{uu}$

$z_y = f_u \cdot u_y = f_u \cdot 1 = f_u$

$z_{yx} = f_{uu} \cdot u_x = f_{uu} \cdot 2x = 2x\, f_{uu}$

$z_{xx} - 2x\, z_{yx} - 2z_y = 2f_u + 4x^2 f_{uu} - 2x\,(2x\, f_{uu}) - 2f_u$

$= 2f_u + 4x^2 f_{uu} - 4x^2 f_{uu} - 2f_u$

$= 0$

5) $J = \dfrac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$

olduğundan $f$ nin yerel olarak tersi vardır. $x = g_1(u,v)$, $y = g_2(u,v)$ olsun. O zaman $f^{-1} = g = (g_1, g_2)$, yani

$\dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{1}{J}\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{1}{10}\cdot 1 = \dfrac{1}{10}$;

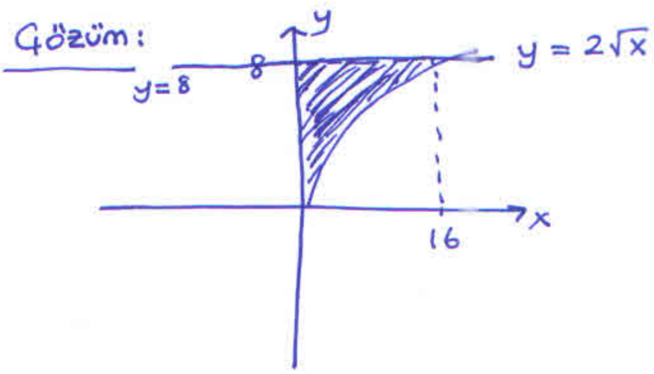
$\dfrac{\partial y}{\partial u} = -\dfrac{1}{J}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{3}{10}$

$\dfrac{\partial x}{\partial v} = -\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{5}$

$\dfrac{\partial y}{\partial v} = \dfrac{1}{J}\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{10}\cdot 4 = \dfrac{2}{5}$ dir.

7) $f(x,y) = \cos(y^3)$ fonksiyonunun $y = 2\sqrt{x}$, $y = 8$ ve $x = 0$ eğrileri ile sınırlanan bölgedeki integralini hesaplayınız.

Çözüm:




$$2\sqrt{x} = 8$$
$$\sqrt{x} = 4$$
$$x = 16$$

$$\int_0^{16}\int_{2\sqrt{x}}^{8} \cos(y^3)\, dy\, dx$$ integrali zor.

$$\int_0^{8}\int_0^{\frac{y^2}{4}} \cos(y^3)\, dx\, dy = \int_0^8 x.\cos(y^3)\Big|_0^{\frac{y^2}{4}} dy$$

$$= \int_0^8 \frac{y^2}{4}\cos(y^3)\, dy$$

$$\begin{matrix} y^3 = u \\ 3y^2 dy = du \end{matrix} \;=\; \int_0^{8^3} \frac{\cos u}{4}\,\frac{du}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{\sin u}{4}\Big|_0^{8^3}$$

$$= \frac{1}{12}\sin(8^3)$$

③ $L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x + \lambda_1(z-1) + \lambda_2(x^2+y^2+z^2-4)$ denirse,

$L_x = 0$, $L_y = 0$, $L_z = 0$, $L_{\lambda_1} = 0$, $L_{\lambda_2} = 0$

denklem sisteminden $(x_0, y_0, z_0)$ için

$(\sqrt{3}, 0, 1)$, $(-\sqrt{3}, 0, 1)$ elde edilir.

$\sqrt{3}$ maksimum, $-\sqrt{3}$ minimum noktadır.

⑥ Ders notlarında var.

8-) $f(x,y) = y \cdot \arctan x$ fonksiyonuna $(0,1)$ noktası civarında ikinci dereceden türevleri içeren terimlere kadar Taylor formülünü uygulayınız.

Çözüm:

$f(x,y) = y \arctan x$ $\qquad f(0,1) = 0$

$f_x(x,y) = \dfrac{y}{1+x^2}$ $\qquad f_x(0,1) = 1$

$f_{xx}(x,y) = \dfrac{-2xy}{(1+x^2)^2}$ $\qquad f_{xx}(0,1) = 0$

$f_y(x,y) = \arctan x$ $\qquad f_y(0,1) = 0$

$f_{yy}(x,y) = 0$ $\qquad f_{yy}(0,1) = 0$

$f_{xy}(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\qquad f_{xy}(0,1) = 1$

$$f(x,y) = f(0,1) + (x-0) f_x(0,1) + (y-1) f_y(0,1) +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left( (x-0)^2 \cdot f_{xx}(0,1) + 2(x-0)(y-1) f_{xy}(0,1) + (y-1)^2 f_{yy}(0,1)\right) + R_3$$
$$= 0 + x \cdot 1 + (y-1) \cdot 0 + \frac{1}{2!}\left( x^2 \cdot 0 + 2x(y-1) \cdot 1 + (y-1)^2 \right) + R_3$$
$$= x + \frac{1}{2}\left( 2x(y-1) + (y-1)^2 \right) + R_3$$

④ $u = f_1(x,y)$ ∍ $v = f_2(x,y)$, $F(x,y,u,v) = xy + x^2u - vy^2$
$G(x,y,u,v) = 3x - 4yu + x^2v$ olsun.

$$J = \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x^2 & -y^2 \\ -4y & -x^2 \end{vmatrix} = -x^4 - 4y^3 \neq 0 \text{ için}$$

$$u_x = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} = \frac{1}{x^4+4y^3}\begin{vmatrix} y+2xu & -y^2 \\ 3-2xv & -x^2 \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{x^4+4y^3}\left(-x^2y - 2x^3u + 3y^2 - 2xy^2v\right)$$

$$v_x = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)} = \frac{1}{x^4+4y^3}\begin{vmatrix} x^2 & y+2xu \\ -4y & 3-2xv \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{x^4+4y^3}\left(3x^2 - 2x^3v + 4y^2 + 8xyu\right)$$